-EXERCICE 29.1-

• ENONCE :

« Champ électromagnétique dans un conducteur ohmique »

On considère un conducteur ohmique homogène, de conductivité γ, de permittivité ε_0. Il contient n électrons libres, de charge –e et de masse m, par unité de volume et l'on admet que les interactions d'un électron avec les autres électrons et les ions du réseau cristallin (les « chocs »…) peuvent être modélisées par une « force de frottement » du type $-k\vec{v}$.

1) **Validité de la loi d'Ohm**.

a) On suppose qu'un champ électrique permanent règne dans le conducteur ; montrer que le modèle précédent permet d'interpréter la loi d'Ohm. Exprimer k en fonction de n, e et γ.

Quelle est la constante de temps τ_1 associée à ce processus ?

b) On applique maintenant au conducteur un champ électrique harmonique de fréquence f : montrer que la loi d'Ohm reste valide tant que f reste très inférieure à une valeur f_1 que l'on exprimera en fonction de τ_1.

Application numérique : on s'intéresse au cuivre pour lequel on prend :

$\gamma = 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1};\ n = 9.10^{28} m^{-3};\ m = 9.10^{-31} kg;\ e = 1,6.10^{-19} C$. Calculer la fréquence limite f_1.

Situer cette fréquence dans le spectre électromagnétique et conclure.

2) **Densité volumique de charges**.

On suppose qu'un excédent local de charges ρ_0 apparaît dans le conducteur (ceci à l'échelle mésoscopique : à l'équilibre, on peut en effet considérer que dans un volume typique de $1\mu m^3$, il y a statistiquement autant de cations que d'électrons libres $\Rightarrow\ \rho_{équilibre} = 0$; ici, le conducteur est hors équilibre, sous l'action d'un champ électrique par exemple).

Donner la loi d'évolution $\rho(t)$ en faisant apparaître un « temps de relaxation » τ_2 et conclure.

3) **Importance relative des courants de conduction et de déplacement**.

Jusqu'à quelle fréquence f_3 le courant de déplacement reste-t-il inférieur en module au centième du courant de conduction ? Situer cette fréquence et la comparer à f_1.

4) **Conclusion**.

Simplifier les équations de Maxwell pour un conducteur ohmique lorsque $f \leq f_1$.

• CORRIGE :

« Champ électromagnétique dans un conducteur ohmique »

1)a) • On applique le PFD à l'électron en négligeant son poids :

$-k\vec{v}-e\vec{E}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt}+\dfrac{k}{m}\vec{v}=\dfrac{-e\vec{E}}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{v}=\vec{v}_\infty[1-\exp(-t/\tau_1)]}$ avec : $\boxed{\tau_1=m/k}$ et : $\boxed{\vec{v}_\infty=\dfrac{-e\vec{E}}{k}}$

(ceci en supposant que $\vec{v}(0)=\vec{0}$, où $\vec{v}$ est la vitesse d'un électron « typique »).

• $\vec{j}(\infty)=n(-e)\vec{v}_\infty=\dfrac{ne^2}{k}\vec{E}=\gamma\vec{E} \Rightarrow \boxed{k=\dfrac{ne^2}{\gamma}}$ et : $\boxed{\tau_1=\dfrac{m\gamma}{ne^2}}$

Rq : au bout de $3\tau_1$, $v(3\tau_1)=0{,}95\times v_\infty \Rightarrow j(3\tau_1)=0{,}95\times j(\infty)$: au bout de quelques τ_1, on peut donc considérer que le conducteur suit convenablement la loi d'Ohm.

b) Nous allons nous intéresser au <u>régime forcé</u> sinusoïdal et donc passer en complexe :

$i\omega\underline{\vec{v}}+\dfrac{\underline{\vec{v}}}{\tau_1}=\dfrac{-e\underline{\vec{E}}}{m} \Rightarrow \underline{\vec{v}}(1+i\omega\tau_1)=\dfrac{-e\tau_1\underline{\vec{E}}}{m} \Rightarrow \boxed{\underline{\vec{j}}=\dfrac{\frac{ne^2\tau_1}{m}}{1+i\omega\tau_1}\underline{\vec{E}}=\dfrac{\gamma_{statique}}{1+i\omega\tau_1}\underline{\vec{E}}}$ où : $\boxed{\gamma_{statique}=\dfrac{ne^2\tau_1}{m}}$

Cette relation traduit un **déphasage** entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$; pour obtenir la loi d'Ohm « classique », il faut que : $\omega\tau_1 \ll 1 \Rightarrow \boxed{f \ll f_1=\dfrac{1}{2\pi\tau_1}}$ <u>A.N</u> : $\tau_1=2{,}3.10^{-14}s \Rightarrow \boxed{f_1=6{,}92.10^{12}\,Hz}$

Dans le visible, le « rouge » a une longueur d'onde : $\lambda_R=0{,}75.10^{-6}m \Rightarrow f_R=c/\lambda=4.10^{14}\,Hz \Rightarrow$ f_1 est située dans le domaine **infrarouge** : dans le cuivre, on peut donc considérer la loi d'Ohm comme valide pour toutes les fréquences industrielles, radio (FM=100MHz) et hyperfréquences (10^9 à $10^{11}\,Hz$).

2) Ecrivons l'équation locale de conservation de la charge (on doit y penser, car l'on cherche une équation différentielle en ρ, avec un terme en $\partial\rho/\partial t$ par exemple) :

$div\vec{j}+\partial\rho/\partial t=0 \Rightarrow \gamma div\vec{E}+\partial\rho/\partial t=0$ (le conducteur étant ohmique et homogène, cela nous permet de « sortir » γ de l'opérateur « div ») ; par ailleurs : $div\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$, ce qui conduit à :

$\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho=0}$ $\Rightarrow$ en tenant compte de la condition initiale : $\boxed{\rho(t)=\rho_0\exp(-t/\tau_2)}$ avec : $\boxed{\tau_2=\dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}}$

<u>A.N</u> : $\boxed{\tau_2=1{,}47.10^{-19}s}$ $\Rightarrow$ ce temps est très petit, mais par rapport à quoi ? En fait, ceci signifie que tant que la période T du champ électrique perturbateur reste grande par rapport au « temps de relaxation » τ_2, tout se passe comme si ρ restait nulle (les durées pendant lesquelles $\rho(t)$ est différente de 0 seraient imperceptibles à l'échelle de la période T) ; en terme de fréquence, on peut dire que $\rho \simeq 0$ dans le cuivre tant que : $\boxed{f \ll f_2=1/\tau_2=6{,}79.10^{18}\,Hz}$.

Rq : f_2 appartient au domaine des **rayons X** ; un rapport 100 entre T et τ_2 conduit à une fréquence limite de l'ordre de $10^{16}\,Hz$, dans les **U.V**.

3) En complexe, on peut écrire :

$$\frac{\left\|\vec{\underline{j}}_D\right\|}{\left\|\vec{\underline{j}}\right\|} = \frac{\left\|i\varepsilon_0\omega\vec{\underline{E}}\right\|}{\left\|\gamma\vec{\underline{E}}\right\|} = \frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma} \leq 10^{-2} \Rightarrow \boxed{f \leq f_3 = 10^{-2} \times \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} = 1,08.10^{16}\,Hz}$$

Rq : f_3 est **supérieure** à f_1, et se trouve dans le domaine ultraviolet.

4) Pour toutes les fréquences allant jusqu'à **l'infrarouge**, on peut simplifier les équations de Maxwell dans le cuivre (et plus généralement dans les bons conducteurs électriques) :

$\boxed{div\vec{E} = 0 \text{ et: } \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E}}$ (nous nous servirons de ce résultat dans l'exercice 29.2)